

Das zeitliche Abklingen der Geschwindigkeits- und Druckkorrelationen in der homogenen isotropen Turbulenz als Anfangswertproblem

Von K. MEETZ

Aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen
(Z. Naturforsch. 11 a, 848—857 [1956]; eingegangen am 8. August 1956)

In der vorangehenden Arbeit¹ wurde die HEISENBERGSche Integrodifferentialgleichung für das Energiespektrum $F(k, t)$ in einem homogenen isotropen turbulenten Strömungsfeld als parabolisches Anfangswertproblem für verschiedene Werte des Parameters α integriert, wobei die Anfangswerte $F(k, t_0)$ aus Messungen von TOWNSEND und STEWART² ermittelt wurden. Der Vergleich der zugehörigen Abklinggesetze für die mittlere Gesamtenergiendichte $E(t)$ mit experimentellen Ergebnissen lieferte einen α -Wert $\alpha=0,75$. Die Größe von α bestimmt aber nicht nur den zeitlichen Abklingvorgang der Gesamtenergie, sondern auch die spektrale Verteilung der Energie auf die verschiedenen Wirbelgrößen zu einem bestimmten Zeitpunkt. Es erscheint daher wünschenswert, eine α -Bestimmung unter diesem Aspekt durchzuführen. Da die Energiespektren $F(k, t)$ selbst nicht von TOWNSEND und STEWART² gemessen worden sind, sondern nur die Zwei- und Dreifachkorrelationen $f(r, t)$ und $k(r, t)$ der Geschwindigkeit, werden aus den in A ermittelten Energiespektren $F(k, t)$ die zugehörigen Geschwindigkeitskorrelationen $f(r, t)$ und $k(r, t)$ ermittelt und mit den Messungen verglichen. Es ergibt sich $\alpha=0,47$. Die beiden optimalen α -Werte differieren also, was aber in Anbetracht der starken Vereinfachungen, die dem HEISENBERGSchen Modell zugrunde liegen, nicht verwundern darf. Betrachtet man das zu $\alpha=0,47$ gehörige Abklinggesetz für $E(t)$, so sieht man, daß dieses den gemessenen Verlauf einigermaßen gut approximiert, so daß die gesamten experimentellen Ergebnisse mit einem α -Wert von 0,47 angenähert richtig beschrieben werden.

Aus der Geschwindigkeitskorrelation $f(r, t)$ kann ferner nach einer Formel von BATCHELOR³ auch die Druckkorrelation $P(r, t)$ berechnet werden, über die bisher nur asymptotische Aussagen für große Re-Zahlen vorlagen. Leider liegen hier jedoch keine experimentellen Ergebnisse zum Vergleich vor.

I. Geschwindigkeitskorrelationen

1. Berechnung der Geschwindigkeitskorrelationen

Im isotropen Fall werden die zwei- und dreistufigen Tensoren des Geschwindigkeitsfeldes

$$R_{ik}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}_0)} \quad \text{und} \quad S_{ijk}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{r}_0) u_j(\mathbf{r}_0) u_k(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})}$$

jeweils durch eine einzige Skalarfunktion bestimmt: (u_i sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} ; \mathbf{r}_0 und $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$ bestimmen zwei Punkte des Strömungsfeldes; zur Definition der Mittelwerte siehe A, Abschnitt I)

$$R_{ik}(\mathbf{r}, t) = \overline{u^2}(t) \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} r_i r_k + \left(f + \frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \delta_{ik} \right] \\ S_{ijk}(\mathbf{r}, t) = (\overline{u^2}(t))^{\frac{1}{2}} \left[\frac{k - r(\partial k / \partial r)}{2 r^3} r_i r_j r_k + \frac{2 k + r(\partial k / \partial r)}{4 r} (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ik}) - \frac{k}{2 r} r_k \delta_{ij} \right], \quad (1)$$

wo $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$. Dieses Ergebnis kann man leicht mit einfachen Hilfsmitteln der Invariantentheorie gewinnen, wie ROBERTSON⁴ gezeigt hat. Die beiden definierenden Skalarfunktionen $f(r, t)$ und $k(r, t)$, die einfach „Zwei- bzw. Dreifachkorrelation“ genannt werden, sind durch die v. KÁRMÁNSche Gleichung verknüpft⁵:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u^2} f = (\overline{u^2})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) k + 2 \nu \overline{u^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f. \quad (2)$$

In dieser Gleichung drückt sich der nichtlineare Charakter der NAVIER-STOKESschen Differentialgleichungen durch das Auftreten von $k(r, t)$ aus. Man braucht also eine weitere Beziehung zwischen f und k , um zu einem bestimmenden Gleichungssystem zu gelangen. Eine derartige Beziehung kann die statistische Theorie aber nicht liefern, wie schon in A angedeutet wurde. Sie kann nur auf einer physikalischen Hypothese beruhen, wie sie etwa im HEISENBERGSchen An-

¹ K. MERZ, Z. Naturforsch. 11 a, 832 [1956]; vorangestehende Arbeit, im folgenden als A zitiert.

² R. W. STEWART u. A. A. TOWNSEND, Philos. Trans. A 243, 359 [1951].

³ G. K. BATCHELOR, Proc. Cambr. Phil. Soc. 47, 359 [1951].

⁴ H. P. ROBERTSON, Proc. Cambr. Phil. Soc. 36, 209 [1940].

⁵ TH. VON KÁRMÁN u. L. HOWARTH, Proc. Roy. Soc., Lond. A 164, 192 [1938].



satz steckt. Auf diesen greifen wir denn auch hier zurück.

Schreiben wir die Gl. (2) ein wenig anders:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u^2} f - 2 \nu \bar{u^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{(u^2)^{3/2}}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 k) \quad (3)$$

und ziehen die HEISENBERGSche Integrodifferentialgleichung⁶ für das Energiespektrum $F(K, t)$ in differenzierter Form hinzu:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2 \nu K^2 F \quad (4)$$

$$= -\nu \frac{\partial}{\partial K} \int_K^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx \int_0^K 2 x^2 F(x, t) dx,$$

und integrieren über K von 0 bis ∞ , so erhalten wir unter Berücksichtigung von (5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u^2} f - 2 \nu \bar{u^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = -2 \int_0^\infty \frac{1}{K^2} \frac{\partial}{\partial K} \left(\nu \int_K^\infty \sqrt{\frac{F}{x^3}} dx \int_0^K 2 x^2 F dx \right) \frac{1}{r^2} \left(\frac{\sin K r}{K r} - \cos K r \right) dK,$$

also mit (3):

$$\frac{(u^2)^{3/2}}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 k) = -2 \int_0^\infty \frac{1}{K^2} \frac{\partial}{\partial K} \left(\nu \int_K^\infty \sqrt{\frac{F}{x^3}} dx \int_0^K 2 x^2 F dx \right) \frac{1}{r^2} \left(\frac{\sin K r}{K r} - \cos K r \right) dK. \quad (6)$$

Integration von (6) über r liefert schließlich

$$k(r, t) = \sqrt{2} \left(\frac{3}{E(t)} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{K^2} \frac{\partial}{\partial K} \left(\nu \int_K^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx \int_0^K 2 x^2 F(x, t) dx \right) \frac{1}{K r^2} \left(\sin K r + 3 \frac{\cos K r}{K r} - 3 \frac{\sin K r}{K^2 r^2} \right) dK.$$

Dazu tritt

$$f(r, t) = \frac{3}{E(t)} \int_0^\infty \frac{F(K, t)}{K^2 r^2} \left(\frac{\sin K r}{K r} - \cos K r \right) dK. \quad (8)$$

Durch die Formeln (7) und (8) ist das Anfangswertproblem für die Zwei- und Dreifachkorrelation zurückgeführt auf das in A behandelte Anfangswertproblem für das Energiespektrum. Leider ist es nicht möglich, den Zusammenhang zwischen f und k , wie er durch (7) und (8) gegeben wird, algebraisch in der Form $k = G(f)$ auszudrücken und (2) direkt zu behandeln.

Unsere Aufgabe besteht nunmehr in der Berechnung von k und f aus den Spektren im Abstand $x/M = 30, 60, 90, 120$ hinter dem Gitter. Hierzu steht das in A berechnete dimensionslose F zur Verfügung. Die obigen

so verfügen wir damit über zwei Gleichungen für f und k , wenn wir den Zusammenhang zwischen f und F beachten, der durch die beiden Integralformeln

$$F(K, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{u^2} f(r, t) K^2 r^2 \left(\frac{\sin K r}{K r} - \cos K r \right) dr, \\ \bar{u^2} f(r, t) = 2 \int_0^\infty \frac{F(K, t)}{K^2 r^2} \left(\frac{\sin K r}{K r} - \cos K r \right) dK \quad (5)$$

gegeben ist. Multiplizieren wir (4) mit

$$\frac{2}{K^2 r^2} \left(\frac{\sin K r}{K r} - \cos K r \right)$$

Integrale liefern dann $k(r/L)$ bzw. $f(r/L)$ (L ist die Bezugslänge, etwa $L = \lambda(t_0)$, wo λ die TAYLORSche Dispersionslänge ist). Sei $y = r/L$ und $x = kL$, so gilt:

$$f(y) = \frac{3}{\tilde{E}} \int_0^\infty \frac{\tilde{F}}{x^2 y^2} \left(\frac{\sin x y}{x y} - \cos x y \right) dx. \quad (9)$$

Für $f'(y)$, das im nächsten Abschnitt zur Berechnung der Druckkorrelationen benötigt wird, ergibt sich

$$f'(y) = \frac{3}{\tilde{E}} \int_0^\infty \frac{\tilde{F}}{x^2 y^2} \left(\sin x y + \frac{3 \cos x y}{x y} - \frac{3 \sin x y}{x^2 y^2} \right) dx. \quad (10)$$

⁶ W. HEISENBERG, Z. Phys. 124, 628 [1948].

Setzen wir

$$R_1(y) = \int_0^\infty \frac{\tilde{F}(x)}{x^2 y^2} \left(\frac{\sin x y}{x y} - \cos x y \right) dx, \quad (11)$$

$$R_2(y) = \int_0^\infty \tilde{F}(x) \frac{\sin x y}{x y} dx,$$

so gilt

$$f(y) = \frac{3}{\tilde{E}} R_1(y); \quad f'(y) = \frac{3}{\tilde{E}} \left(\frac{R_2(y) - 3 R_1(y)}{y} \right). \quad (12)$$

Die Berechnung des komplizierten Integrals (7) kann ganz analog durchgeführt werden. Setzt man nämlich

$$V(K) = \sqrt{2} \left(\frac{3}{\tilde{E}} \right)^{3/2} \frac{1}{K^2} \frac{\partial}{\partial K} \left(\zeta \int_K^\infty \sqrt{\frac{F}{x^3}} \int x^2 F dx \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{3}{\tilde{E}} \right)^{3/2} \left[\zeta \int_K^\infty \sqrt{\frac{F}{x^3}} dx F(K) \right. \quad (13)$$

$$\left. - \frac{\zeta}{K^3} \sqrt{\frac{F(K)}{K}} \int_0^K x^2 F dx \right],$$

so ist

$$y k(y) = \int_0^\infty \frac{\tilde{V}(x)}{x y} \left(\sin x y + \frac{3 \cos x y}{x y} - \frac{3 \sin x y}{x^2 y^2} \right) dx. \quad (14)$$

$\tilde{V}(x)$ berechnet sich nun einfach aus den im Laufe der Integration der HEISENBERGSCHEN Integralgleichung ermittelten Funktionen $\alpha(k, t)$ und $\beta(k, t)$ (siehe A):

$$\tilde{V}(x) = \sqrt{2} \left(\frac{3}{\tilde{E}} \right)^{3/2} \left[(\beta(x, t) - 1) \tilde{F}(x) - \frac{\zeta}{x^3} \sqrt{\frac{\tilde{F}}{x}} \alpha(x, t) \right], \quad (15)$$

$$\text{Mit } W_1(y) = \int_0^\infty \frac{\tilde{V}(x)}{x^2 y^2} \left(\frac{\sin x y}{x y} - \cos x y \right) dx, \quad (16)$$

$$W_2(y) = \int_0^\infty \tilde{V}(x) \frac{\sin x y}{x y} dx$$

$$\text{ist dann auch } k(y) = \frac{W_2(y) - 3 W_1(y)}{y}. \quad (17)$$

Damit ist die Berechnung der Korrelationen auf ein einfaches Schema zurückgeführt: 1. ist $V(x)$ zu ermitteln, 2. müssen die Integrale (11) und (16) berechnet werden, 3. sind die Korrelationen (12) und (17) zu ermitteln.

Als physikalisch sinnvoll, gemessen am Abklinggesetz, hatten sich in A nur die Lösungen für $\zeta = 0,47$ und $\zeta = 0,75$ ausgewiesen. Für beide wer-

den denn auch im Gitterabstand $x/M = 30, 60, 90, 120$ die zugehörigen Geschwindigkeitskorrelationen ermittelt, um einen Vergleich mit den Messungen von STEWART und TOWNSEND zu ermöglichen. Von jeder Korrelation sind 11 Werte berechnet:

$$r/\lambda = 0,5; 1; \dots; 10.$$

Die Ergebnisse der Rechnung sind in den Abb. 1 bis 9 aufgetragen.

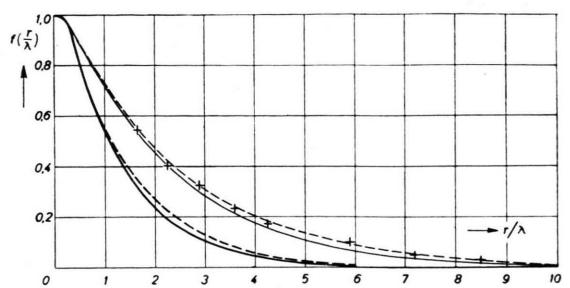


Abb. 1. Zweifach-Geschwindigkeitskorrelation $f(r/\lambda)$ und Druckkorrelation $P(r/\lambda)/P(0)$ bei $x/M=60$.
Geschwindigkeitskorrelationen: — $\zeta=0,47$;
- - - - $\zeta=0,75$.
Druckkorrelationen: — $\zeta=0,47$, $U=620$ cm/sec,
- - - - $\zeta=0,75$, $R_M=5300$.
+ Meßpunkte für $f(r/\lambda)$ nach STEWART und TOWNSEND.

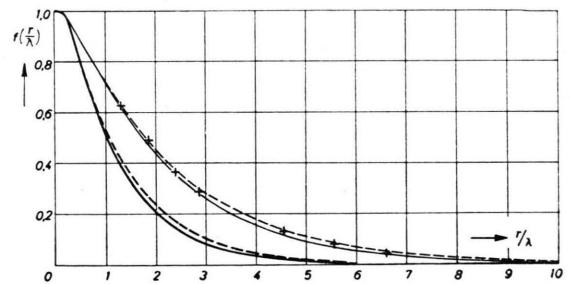


Abb. 2. Zweifach-Geschwindigkeitskorrelation $f(r/\lambda)$ und Druckkorrelation $P(r/\lambda)/P(0)$ bei $x/M=90$.
Weiterer Text wie in Abb. 1.

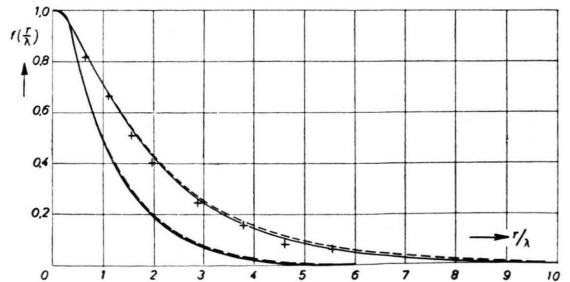


Abb. 3. Zweifach-Geschwindigkeitskorrelation $f(r/\lambda)$ und Druckkorrelation $P(r/\lambda)/P(0)$ bei $x/M=120$.
Weiterer Text wie in Abb. 1.

2. Asymptotisches Verhalten

Über das asymptotische Verhalten der Korrelationsfunktionen bezüglich $t \rightarrow \infty$ bzw. $r \rightarrow \infty$ kann man nur sehr spärliche Angaben machen. Untersuchen wir zunächst $f(r, t)$ für $t \rightarrow \infty$. Sei t^* so gewählt, daß für $t \geq t^*$ die Trägheitsglieder $[k(r, t)]$ gegenüber den Reibungsgliedern vernachlässigt werden können. Die Differentialgleichung (2) wird dann bestimmd für f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - 2\nu \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{du^2}{dt} f = 0 \quad \text{für } t \geq t^*. \quad (18)$$

Sei ferner t so groß gegen t^* , daß das Abklingen der Gesamtenergie durch das $t^{-5/2}$ -Gesetz [siehe A, Gl. (40)] wiedergegeben wird. Dann ist

$$\frac{1}{u^2} \frac{du^2}{dt} = - \frac{5}{2(t-t^*)}.$$

Die Differentialgleichung (18) lautet dann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{5}{2(t-t^*)} f - 2\nu \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{für } t \gg t^*. \quad (19)$$

Eine Lösung ist

$$f(r, t) = \exp[-r^2/8\nu(t-t^*)]. \quad (20)$$

(18) stellt für f ein parabolisches Anfangswertproblem: $f(r, t_0) = f_0(r)$, $t_0 \geq t^*$. Für alle Anfangswerte geht die Lösung für $t \gg t^*$ in (20) über. Das folgt daraus, daß (20) auch durch die Transformation (5) aus $F(k, t) = (A/3\pi) k^4 \exp(-2\nu k^2(t-t^*))$ gewonnen werden kann. Durch letztere Formel wird das asymptotische Verhalten von $F(k, t)$ für $t \gg t^*$ beschrieben. (20) beschreibt somit allgemein das asymptotische Verhalten von f für $t \gg t^*$, unabhängig von den Anfangswerten.

Der Gedanke liegt nahe, dieses Verfahren auch

zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von $k(r, t)$ zu benutzen. In der zu (2) analogen Gleichung für $\partial(\bar{u}^2)^{3/2} k / \partial t$ treten Skalarfunktionen des vierstufigen Mittelwerttensors auf. Man kann dann ein t festlegen, derart daß für $t \geq \tilde{t}$ diese Glieder gegenüber den k -Gliedern vernachlässigt werden können. Es ergibt sich dann eine zu (18) analoge Gleichung für $k(r, t)$. Auch hier tritt ein Glied von der Form $(1/\bar{u}^2) \frac{du^2}{dt}$ auf. Auch kann man das $t^{-5/2}$ -Gesetz für \bar{u}^2 verwenden, das für $t \gg t^*$ gilt, da $\tilde{t} \approx t^*$ sein muß. Denn wenn man die Dreifachgegen die Zweifachkorrelationen vernachlässigen kann, so auch die vierfachen gegen die dreifachen. Soweit liefe alles parallel zum obigen Vorgehen. Nur kann man hier nicht zeigen, daß die ähnliche Lösung, die nur von $x = r/\sqrt{\nu t}$ abhängt, eine asymptotische Lösung bezüglich $t \rightarrow \infty$ für alle Anfangswertprobleme ist, wie es oben möglich war. Diese Möglichkeit beruhte darauf, daß die asymptotische Form von $F(k, t)$ für $t \rightarrow \infty$ unabhängig von den Anfangsbedingungen war. Über das asymptotische Verhalten der FOURIER-Transformierten von $k(r, t)$ ist dagegen nichts bekannt, wenn man nicht auf den HEISENBERG-schen Ansatz zurückgreifen will.

(20) zeigt, daß $f(r) \sim \exp(-r^2)$ für $t \gg t^*$. Ob das auch zu früheren Zeitpunkten der Fall ist, kann nicht mit Bestimmtheit gesagt werden. Betrachtet man die aus (5) folgenden Integralrelationen:

$$\left(\frac{\partial^{2n} F}{\partial K^{2n}} \right)_{K=0} = \frac{4}{\pi} (-1)^n (n-1) \bar{u}^2 \int_0^\infty r^{2n} f(r) dr,$$

so erkennt man, daß $f(r)$ stärker als jede Potenz für $r \rightarrow \infty$ verschwinden muß, wenn F im Punkt $k=0$ unendlich oft differenzierbar nach k ist. Letzteres ist plausibel, kann aber nicht bewiesen werden. Multipliziert man (3) mit r^{2n} und integriert von 0 bis ∞ , so erhält man nach einigen partiellen Integrationen:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{2n}}{dt} - 2\nu(2n-4)(2n-1)M_{2n-2} - 2\nu\bar{u}^2 r^{2n} \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_\infty^0 + 2\nu\bar{u}^2(2n-4)r^{2n-1}f \Big|_\infty^0 &= \int_0^\infty r^{2n} K(r) dr \\ = (\bar{u}^2)^{3/2} r^{2n} k \Big|_\infty^0 - (\bar{u}^2)^{3/2} (2n-4) \int_0^\infty r^{2n-1} k dr &\quad \text{für } n \geq 1; \quad M_{2n} = u^2 \int_0^\infty r^{2n} f(r) dr; \quad K(r) = \frac{(\bar{u}^2)^{3/2}}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 k). \end{aligned}$$

Verschwindet f stärker als jede negative Potenz von r im Unendlichen, so fallen die ausintegrierten f -Glieder weg, und es bleibt:

$$\frac{dM_{2n}}{dt} - 2\nu(2n-4)(2n-1)M_{2n-2} = (\bar{u}^2)^{3/2} r^{2n} k \Big|_\infty^0 - (\bar{u}^2)^{3/2} (2n-4) \int_0^\infty r^{2n-1} k dr = \int_0^\infty r^{2n} K(r) dr. \quad (21)$$

Geht man von der plausiblen Annahme aus, daß $F(k, t)$ für $k=0$ beliebig oft nach k differenzierbar ist, so existiert die linke Seite. Also muß auch die rechte existieren, d. h. es muß $K(r)$ stärker als jede negative Potenz von r verschwinden. Daraus folgt, daß entweder das gleiche Verhalten für $k(r)$ zu fordern ist für $r \rightarrow \infty$, oder aber $K(r)=0$ im asymptotischen Bereich, d. h. $k(r) \sim r^{-4}$ für $r \rightarrow \infty$. Aus (21) folgt für $n=2$:

$$\frac{dM_4}{dt} = \int_0^\infty r^4 K(r) dr = r^4 k(r) \Big|_0^\infty \cdot (\bar{u}^2)^{3/2}.$$

Im Falle $k(r) \sim r^4$ ist also $dM_4/dt = d\Omega/dt \neq 0$, im Gegensatz zu der Meinung, daß die LOITSIANSKISCHE Invariante⁷ konstant ist. Zu diesem zweiten, mit der Differenzierbarkeitsforderung für $F(k, t)$ in $k=0$ verträglichen Verhalten von $k(r, t)$ für $r \rightarrow \infty$ gelangen PROUDMAN und REID^{8b} in einer jüngst erschienenen Arbeit auf Grund der Annahme, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Geschwindigkeitsvektoren in drei verschiedenen Punkten des Strömungsfeldes eine Normalverteilung ist.

3. Diskussion der Ergebnisse

An Hand von Abb. 6, die die beiden Dreifachkorrelationen für $\alpha=0,75$ und $\alpha=0,47$ bei $x/M=30$, also im Anfangspunkt unserer Rechnung zeigt, erkennen wir, daß die Korrelation $k(r, t)$ für $\alpha=0,47$ sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt, während sie für $\alpha=0,75$ viel zu große Werte annimmt. Nun, das Auftreten großer Differenzen zwischen den einzelnen α -Werten ist bei $k(r, t)$ zu erwarten, da es nach (7) in α linear ist. Die Dreifachkorrelation hängt ja nur von den Trägheitsgliedern, also der Austauschgröße, ab und wird von der Reibung nur indirekt im Laufe des Abklingvorgangs beeinflußt. Wir haben schon früher bemerkt, daß der α -Wert 0,47 durch diese Rechnung gewonnen wurde, während sich $\alpha=0,75$ durch Überlegungen ergab, die das Abklinggesetz betreffen. Im weiteren Verlauf des Abklingvorgangs treten Abweichungen von den Meßpunkten auf (Abb. 7 bis 9). Im Bereich $r/\lambda=5$ bis 10 ergeben die Rechnungen offenbar ein zu starkes Abklingen von $k(r)$. Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, daß die Messungen in diesem Bereich recht ungenau sind, wie von den Experimentatoren selbst angegeben wird.

Bei den Zweifachkorrelationen (Abb. 1 bis 3) sind die Differenzen zwischen den Korrelationen für die beiden α -Werte sehr gering und nehmen im Laufe des Abklingvorganges noch weiter ab. Die Meß-

punkte werden von beiden Scharen gut approximiert. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Korrelationen für $\alpha=0,47$ gut mit den Messungen von STEWART und TOWNSEND übereinstimmen. Es sei vermerkt, daß der Wert $\alpha=0,47$ gut übereinstimmt mit dem von PROUDMAN^{8b} angegebenen Bereich für $\alpha=0,45 \pm 0,05$, den dieser durch Vergleich von ähnlichen Lösungen der HEISENBERGSchen Gleichung mit experimentellen Daten gewann.

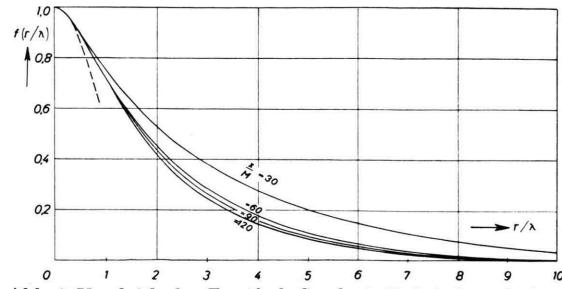


Abb. 4. Vergleich der Zweifach-Geschwindigkeitskorrelationen.
 $\alpha=0,47$.

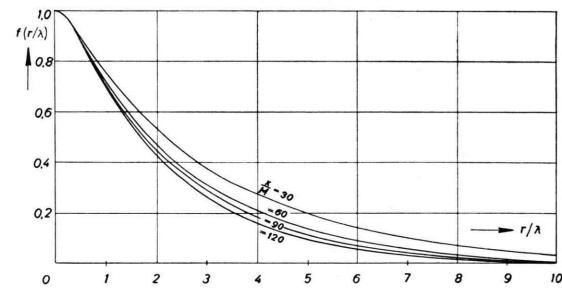


Abb. 5. Vergleich der Zweifach-Geschwindigkeitskorrelationen.
 $\alpha=0,75$.

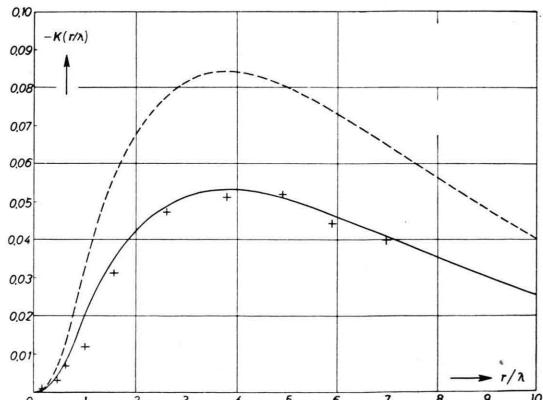
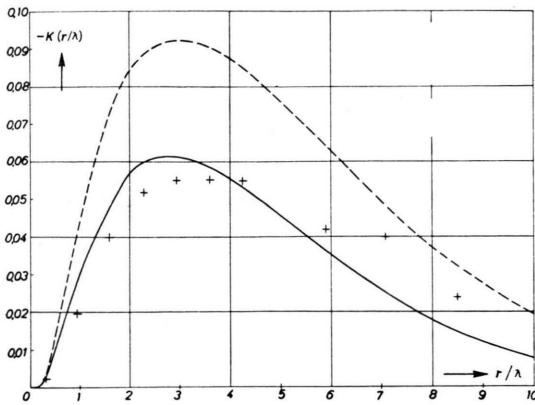


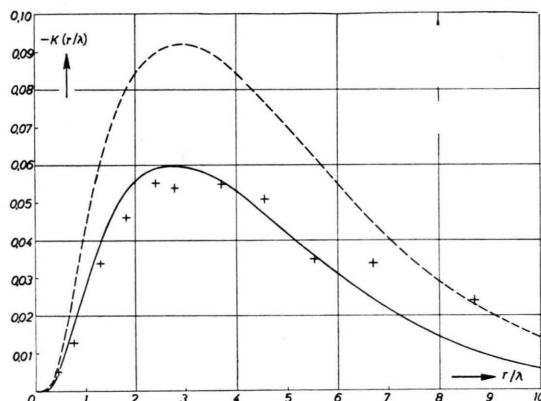
Abb. 6. Dreifach-Geschwindigkeitskorrelation $K(r/\lambda)$ bei $x/M=30$.
 $\alpha=0,47$, $\alpha=0,75$; $R_M=5300$, $U=620$ cm/sec.
+ Meßpunkte von STEWART und TOWNSEND.

⁷ L. G. LOITSIANSKI, Techn. Memor. NACA, Wash., No. 1079 [1939].

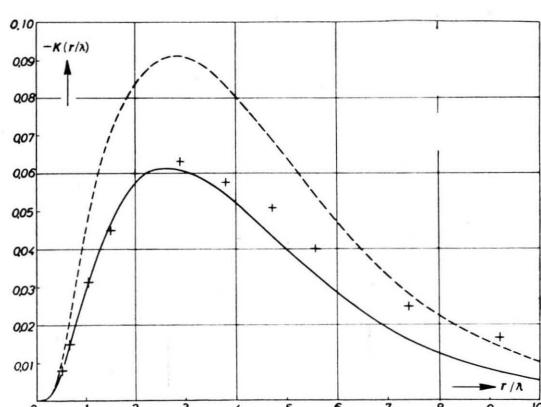
^{8a} I. PROUDMAN u. W. H. REID, Philos. Trans. A **247**, 63 [1954].
^{8b} I. PROUDMAN, Proc. Cambr. Phil. Soc. **47**, 158 [1951].

Abb. 7. Dreifach-Geschwindigkeitskorrelation $K(r/\lambda)$ bei $x/M=60$.

Weiterer Text wie in Abb. 6.

Abb. 8. Dreifach-Geschwindigkeitskorrelation $K(r/\lambda)$ bei $x/M=90$.

Weiterer Text wie in Abb. 6.

Abb. 9. Dreifach-Geschwindigkeitskorrelation $K(r/\lambda)$ bei $x/M=120$.

Weiterer Text wie in Abb. 6.

II. Die Druckkorrelation $P(r, t)$

1. Zusammenhang der Druckkorrelation mit der Geschwindigkeitskorrelation $f(r, t)$

Die Funktion $P(r, t)$ ist die Zweifachkorrelation der Druckverteilung in einem statistisch homogenen und isotropen Strömungsfeld. Sie ist also in der üblichen Weise definiert durch

$$P(r, t) = \overline{p(r_0 + r, t) p(r_0, t)} \quad (22)$$

und hängt wegen der vorausgesetzten Homogenität und Isotropie des Strömungsfeldes nur vom Betrag des Abstandsvektors r der beiden Punkte ab, die korreliert werden, und von der Zeit t .

Über die NAVIER-STOKESCHEN Differentialgleichungen hängt das Druckfeld mit dem Geschwindigkeitsfeld zusammen. Es wird sich daher auch die Druckkorrelation durch Geschwindigkeitskorrelationen ausdrücken lassen, und zwar durch eine mit dem vierstufigen Korrelationstensor $u_i u_k' u_l u_m'$ gebildete Invariante (gestrichene Komponenten beziehen sich auf den Ort $r_0 + r$, nicht gestrichene Komponenten auf den Ort r_0). Setzt man voraus, daß die folgende Zerfällungsregel gilt:

$$u_i u_k' u_l u_m' = R_{ik} R_{lm} + R_{im} R_{kl} + (\bar{u}^2)^2 \delta_{il} \delta_{km} \quad (23)$$

[δ_{il} = KRONECKER-Symbol, R_{ik} wie in (1)], so läßt sich die Vierfachkorrelation auf die Zweifachkorrelation $f(r, t)$ zurückführen, und man erhält nach BATCHELOR³ folgenden Ausdruck für $P(r, t)$:

$$P(r, t) = 2 \varrho^2 [\bar{u}^2(t)]^2 \int_r^\infty \left(s - \frac{r^2}{s} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 ds. \quad (24)$$

Diese Formel gilt nur unter der Annahme von (23), und es mag daher angebracht sein, wenn wir kurz erörtern, welche Typen von Verteilungsfunktionen (23) erfüllen. Es genügt dabei, sich auf den zweidimensionalen Fall zu beschränken, in dem man etwa in $r_0 + r$ wie in r_0 jeweils nur eine Geschwindigkeitskomponente x bzw. y betrachtet. Die zu den beiden Zufallsvariablen x und y gehörige Verteilungsfunktion sei $\Phi(x, y)$. Die Zerfällungsregel (23) lautet dann:

$$\bar{x}^2 \bar{y}^2 = \bar{x}^2 \bar{y}^2 + 2 \bar{(xy)^2}.$$

Diese Bedingung wird zunächst von einer zweidimensionalen Normalverteilung erfüllt, wie man leicht mit Hilfe der charakteristischen Funktion $\varphi(u, v)$ erkennen kann. Diese lautet nämlich für die Normalverteilung:

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(xu+yv)} d\Phi(x, y) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}^2 u^2 + 2 \bar{xy} u v + \bar{y}^2 v^2)}. \end{aligned}$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion im Integral wie auch die charakteristische Funktion und führt Koeffizientenvergleich durch, so folgt sofort die obige Relation.

Man kann aber auch leicht andere Verteilungen finden, die die Zerfällungsregel erfüllen. Ist nämlich $F(x)$ eine Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen x , für die gilt:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = 0 ;$$

$$\bar{x^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 dF(x) = 3(\bar{x^2})^2 = 3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) \right)^2,$$

so gilt für die zweidimensionale Verteilung

$$\Phi(x, y) = F(x) F(x-y)$$

die Relation $\bar{x^2 y^2} = \bar{x^2} \bar{y^2} + 2(\bar{x} \bar{y})^2$.

Sei nämlich $x = u$, $x-y = v$,

so ist $\psi(u, v) = F(u) F(v)$

eine unabhängige zweidimensionale Verteilung in u, v . Es gilt also:

$$\bar{x^2 y^2} = \bar{u^2} \bar{(u-v)^2} = \bar{u^4} + \bar{u^2 v^2} - \{2 \bar{u^3 v}\},$$

$$\bar{x^2} = \bar{u^2} ; \bar{x y} = \bar{u(u-v)} = \bar{u^2} + \{\bar{u v}\}$$

$$\bar{y^2} = \bar{(u-v)^2} = \bar{u^2} + \bar{v^2} - \{2 \bar{u v}\},$$

$$\bar{x^2 y^2} + 2(\bar{x} \bar{y})^2 = \bar{u^2} \bar{v^2} + 3 \bar{u^2} \bar{u^2} = \bar{u^4} + \bar{u^2} \bar{v^2} = \bar{x^2 y^2}$$

nach Voraussetzung.

Man benötigt also nur noch eindimensionale Verteilungsfunktionen, die $\bar{x} = 0$ und $\bar{x^4} = 3(\bar{x^2})^2$ erfüllen. Solche können natürlich leicht konstruiert werden und liefern dann durch die Faltung $F(x) \times F(x-y)$ zweidimensionale Verteilungen der gewünschten Art. Die Annahme der Zerfällungsregel (23) ist unerlässlich, wenn man zu Aussagen über die Druckkorrelation kommen will, aber keineswegs selbstverständlich.

Für das mittlere Druckquadrat ergibt sich aus (24)

$$\bar{p^2}(t) = P(0) = \varrho^2 \bar{u^2}^2 2 \int_0^\infty s \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 ds = A(t) \varrho^2 \bar{u^2}^2(t) \quad (25)$$

$$\text{mit } A(t) = 2 \int_0^\infty s \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 ds.$$

2. Asymptotisches Verhalten

Einfache Aussagen lassen sich hier wiederum für $t \rightarrow \infty$ machen, unter der Voraussetzung $t \gg t^*$, für Zeiten also, wo man einerseits die Trägheitsglieder gegenüber den Reibungsgliedern vernachlässigen kann, andererseits die Zweifachkorrelation $f(r, t)$

^{9a} G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc., Lond. A 151, 421 [1935].

^{9b} G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc., Lond. A 156, 307 [1936].

durch (20) dargestellt wird. Setzt man (20) in (24) ein, so ergibt sich

$$P(r, t) = \varrho^2 \bar{u^2}^2(t) e^{-\frac{r^2}{4r(t-t^*)}} \quad \text{für } t \gg t^*, \quad (26)$$

was man auch so schreiben kann:

$$P(r, t) = [\varrho u_1(x_1+r, x_2, x_3) u_1(x_1, x_2, x_3)]^2 \quad (27)$$

(u_1 ist die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Strömungsrichtung durch das Gitter). Das mittlere Druckquadrat wird einfach:

$$\bar{p^2} = P(0) = \varrho^2 \bar{u^2}^2 \quad \text{also } A(t) = 1 \quad \text{für } t \gg t^*. \quad (28)$$

Auch für den Druckgradienten lässt sich leicht ein asymptotischer Ausdruck gewinnen, der im gleichen Bereich gültig ist: Man geht dabei zweckmäßig von der Darstellung aus:

$$\text{grad } p \text{ grad } p' = -\mathcal{A}_r \bar{p p'} = -\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r}\right),$$

die mit $r \rightarrow 0$ gegen

$$\overline{(\text{grad } p)^2} = -3 P''(0) = 12 \varrho^2 \bar{u^2}^2 \int_0^\infty \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 ds \quad (29)$$

strebt. Da das Strömungsfeld statistisch-isotrop ist, folgt aus (29)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = 4 \varrho^2 \bar{u^2}^2 \int_0^\infty \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 ds. \quad (30)$$

In seiner grundlegenden Arbeit zur statistischen Theorie der Turbulenz hat TAYLOR^{9a, b} analog dem Ansatz für die Dissipationslänge λ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\bar{u^2}}{\lambda^2},$$

eine Länge λ_p definiert durch:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = \frac{\varrho^2 \bar{u^2}^2}{\lambda_p^2}. \quad (31)$$

Mit (30) ergibt sich nun sofort:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_p} \right)^2 = 4 \int_0^\infty \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 ds, \quad \text{wo } s = r/\lambda. \quad (32)$$

x/M	$\lambda/\lambda_p; \alpha=0,47$	$\lambda/\lambda_p; \alpha=0,75$
30	0,95	0,95
60	1,11	1,06
90	1,13	1,09
120	1,16	1,16

Tab. 1.

In Tab. 1 sind die Werte angegeben, die mit Hilfe der in I berechneten Korrelationsfunktionen $f(r, t)$ ermittelt wurden. Man sieht, daß sie gut mit der TAYLORSchen Annahme $\lambda \approx \lambda_p$ übereinstimmen. TAYLOR hat den Ansatz (31) mit $\lambda \approx \lambda_p$ in (16) dazu verwendet, den Einfluß eines isotrop homogen turbulenten Strömungsfeldes auf die laminare Grenzschicht einer längs angeströmten Platte und einer Kugel zu ermitteln. Seine Ergebnisse stimmten recht gut mit experimentellen Ergebnissen überein und sprechen damit für den Ansatz $\lambda_p \approx \lambda$, der sich auch hier als gute Näherung erweist, und zwar unabhängig von der Zeit.

Das asymptotische Verhalten von $\overline{(\text{grad } p)^2}$ ergibt sich durch Auswertung von (29) mit Hilfe von (20) zu:

$$\overline{(\text{grad } p)^2} = \frac{3 \varrho^2 \overline{u^2}^2}{2 \nu (t - t^*)} \quad \text{für } t \gg t^*. \quad (33)$$

Bezüglich $r \rightarrow \infty$ zu früheren Zeitpunkten kann man keine Aussagen machen. Doch muß auch hier ein exponentielles Gesetz gelten, wenn sich die Zweifachkorrelation exponentiell verhält. Für $r \rightarrow 0$ erhält man durch Entwicklung der Integralformel (24):

$$P(r) = 2 \varrho^2 \overline{u^2}^2 \left[\int_0^\infty s f'^2 ds - r^2 \int_0^\infty \frac{f'^2}{s} ds + \frac{f_0''^2}{4} r^4 \pm \dots \right] \quad (34)$$

oder mit (25) und (29):

$$P(r) = \overline{p^2} - \frac{r^2}{6} \overline{(\text{grad } p)^2} + \frac{1}{2} r^4 \varrho^2 \left(\frac{\overline{u^2}}{\lambda^2} \right)^2 \pm \dots \quad (35)$$

Die Formeln (26) bis (28) lassen sich nun auch auf andere Weise interpretieren. Sie sind unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die Trägheitsglieder vernachlässigt werden können, was um so früher geschehen kann, je kleiner die Re-Zahl ist. Sie stehen also auch für den Grenzfall $\text{Re} \rightarrow 0$. Damit wird nahegelegt, den entgegengesetzten Grenzfall $\text{Re} \rightarrow \infty$ zu untersuchen. In diesem Fall spielt die Zähigkeit eine immer größere Rolle, so daß die Energie durch den Austauschvorgang zu immer größeren Wellenzahlen transportiert wird, da der hemmende Einfluß der Reibung fehlt. Damit wird eine Entkopplung von den großen Wirbeln ermöglicht, d. h. von den Anfangsbedingungen, so daß ein Gleichgewicht im Sinne von A, Abschnitt VII, existieren muß, das sich nun bis an die großen Wirbel heran erstreckt.

Es hängt vom Betrag ε der Änderung der Gesamtenergie in der Zeiteinheit und der kinematischen Zähigkeit ν als Parametern ab, die man auch durch eine charakteristische Länge und eine charakteristische Geschwindigkeit ersetzen kann; es erstreckt sich über einen so großen Wellenzahlbereich, daß im Anfang des Gleichgewichtsbereiches bei kleineren k ein Teilbereich existiert, der nur vom Austauschvorgang beherrscht wird. Das Energiespektrum im gesamten Gleichgewichtsbereich wird nach HEISENBERG¹⁰ wiedergegeben durch

$$F(k, t) = V^2 l G(kl) = \frac{\varepsilon^2 V^2 l}{4(kl)^7 (1 + 3 \varepsilon^2/8(kl)^4)^{4/3}}; \\ V = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad l = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}. \quad (36)$$

Der „Trägheitsbereich“ ist nun dadurch ausgezeichnet, daß die Universalfunktion $G(kl)$ so beschaffen sein muß, daß in $V^2 l G(kl)$ die Abhängigkeit von ν entfällt. Das trifft für $k \ll 1/l$ zu, denn dann folgt aus (36):

$$F(k, t) = \left(\frac{8 \varepsilon}{9 \lambda} \right)^{2/3} k^{-5/3}, \quad k \ll 1/l, \quad (37)$$

was tatsächlich nicht von ν abhängt. Dieses $k^{-5/3}$ -Gesetz für das Energiespektrum ist auch von v. WEIZSÄCKER¹¹ und ONSAGER¹² auf anderem Wege hergeleitet worden.

Diese Feststellungen lassen sich nun auch auf die Zweifachkorrelation übertragen. Existiert das Gleichgewicht für $k \gg k_0$, so ist es für $f(r)$ bestimmt in $r \ll r_0$, wo r_0 die Größenordnung $1/k_0$ hat. Der Trägheitsbereich wird begrenzt durch: $l \ll r \ll r_0$, während $0 \leq r \ll l$ dem k^{-7} -Bereich des Spektrums entspricht. Die Theorie des Gleichgewichts ist nun nicht direkt auf die Geschwindigkeitskorrelation $\overline{u^2 f(r)} = \overline{u_1 u_1'}$ anwendbar, sondern nur auf die Mittelwerte der Differenzen der Strömungsgrößen in zwei verschiedenen Punkten des Gleichgewichtsbereiches, wie KOLMOGOROV¹³ gezeigt hat. Wir müssen daher ansetzen:

$$\overline{(u_1 - u_1')^2} = 2 \overline{u^2} (1 - f(r)) = V^2 H(r/l), \quad (38)$$

wo $H(r/l)$ eine Universalfunktion von r/l ist. Im Trägheitsbereich muß wieder $V^2 H(r/l)$ von ν unabhängig werden. Aus (38) folgt dann:

$$\overline{(u_1 - u_1')^2} = 2 \overline{u^2} (1 - f(r)) \\ = C V^2 (r/l)^{5/3}, \quad l \ll r \ll r_0 \quad (39)$$

¹⁰ W. HEISENBERG, Proc. Roy. Soc., Lond. A **195**, 402 [1948].

¹¹ C. F. VON WEIZSÄCKER, Z. Phys. **124**, 614 [1948].

¹² L. ONSAGER, Phys. Rev. **68**, 286 [1945].

¹³ A. N. KOLMOGOROV, C. R. Acad. Sci. URSS **30**, 301 [1941].

(C ist eine Konstante). Um dieses Ergebnis für die Druckkorrelation zu verwenden, setzen wir es ein in

$$\begin{aligned}\overline{(p - p')^2} &= 2(P(0) - P(r)) \quad (40) \\ &= 2\varrho^2 \overline{u^2}^2 \left[\int_0^r y f'^2 dy - r^2 \int_r^\infty \frac{1}{y} f'^2 dy \right]\end{aligned}$$

und erhalten das Verhalten der Druckkorrelation im Trägheitsbereich:

$$\overline{(p - p')^2} = C^2 V^4 \varrho^2 (r/l)^{4/3}, \quad l \ll r \ll r_0 \quad (41)$$

oder auch

$$\begin{aligned}\text{Re} \rightarrow \infty : \quad &\overline{(p - p')^2} = \varrho^2 (u_1 - u_1')^2 \\ &= \varrho^2 (u_1(x_1 + r, x_2, x_3) - u_1(x_1, x_2, x_3))^2, \quad (42)\end{aligned}$$

Das asymptotische Verhalten für $\text{Re} \rightarrow 0$ wird demgegenüber gemäß (27) beschrieben durch

$$\begin{aligned}\text{Re} \rightarrow 0 : \quad &\overline{(p - p')^2} = 2\varrho^2 \overline{(u_1^2(x_1, x_2, x_3))^2} \\ &- u_1(x_1 + r, x_2, x_3) u_1(x_1, x_2, x_3)^2. \quad (43)\end{aligned}$$

Die Beziehung (42) wurde von OBUKHOV¹⁴ angegeben und später durch Berechnung weiterer Glieder von OBUKHOV und YAGLOM¹⁵ verbessert.

Entsprechende asymptotische Aussagen lassen sich auch für den Druckbeiwert $A^{+1/2}$ machen. Für $\text{Re} \rightarrow \infty$ strebt $A \rightarrow 1$. Zur Bestimmung des Grenzwertes für $\text{Re} \rightarrow \infty$ muß man in dem Integralausdruck (25) Korrelationen einsetzen, die mit Hilfe von ähnlichen Lösungen der HEISENBERGSchen Gleichung gewonnen sind und damit einem Gleichgewichtszustand entsprechen. Diese Berechnung hat BATCHELOR³ durchgeführt und $A = 0,34$ erhalten. Zwischen diesen

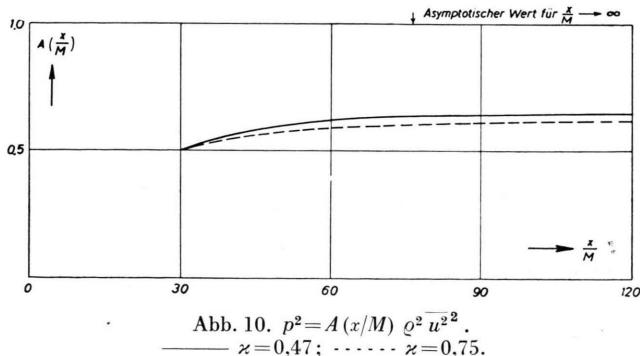


Abb. 10. $p^2 = A(x/M) \varrho^2 \overline{u^2}^2$.
— $\zeta = 0,47$; - - - $\zeta = 0,75$.

beiden Grenzwerten muß sich die Größe A im Laufe des Abklingvorgangs bewegen, und zwar von einem Anfangswert 0,34 gegen 1, da die charakteristische Re-Zahl $R_\lambda = u \lambda / \nu$ im Laufe des Abklingvorgangs abnimmt (Abb. 10).

3. Abklingen der Druckkorrelation

Die Integralformel (24) ermöglicht die Berechnung der Druckkorrelation $P(r, t)$ aus der Ableitung der Geschwindigkeitskorrelation $f'(r)$, die wir bereits in I aus den Lösungen der HEISENBERGSchen Gleichung ermittelt haben. Für $x/M = 30$ können wir $P(r)$ aus der von STEWART und TOWNSEND gemessenen Korrelation $f(r, x/M = 30)$ berechnen und erhalten so die Anfangswerte $P(r, x/M = 30)$. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in den Abb. 1 bis 3 unter den Geschwindigkeitskorrelationen $f(r/\lambda)$ aufgetragen, und zwar in der Normierung $P(r/\lambda)/P(0)$. Man erkennt, daß $P(r/\lambda)$ für kleine r/λ etwas schwächer abfällt als $f(r/\lambda)$, um dann allerdings weit stärker gegen Null zu streben. Dieses Verhalten ergab sich auch bei BATCHELOR³ für große Re-Zahlen und ist schon deshalb zu erwarten, weil die Druckkorrelation quadratisch von der Geschwindigkeitskorrelation abhängt. Da die Werte für $\zeta = 0,47$ und $\zeta = 0,75$ sich kaum unterscheiden, darf angenommen werden, daß die Ergebnisse den wahren Sachverhalt gut approximieren, trotz Benutzung des HEISENBERGSchen Ansatzes. Leider liegen keine experimentellen Ergebnisse vor, die sich zum Vergleich eignen. Le-

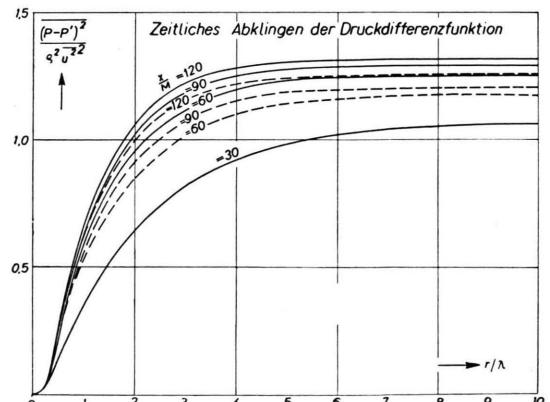


Abb. 11. Zeitliches Abklingen der Druckdifferenzfunktion.
— $\zeta = 0,47$; - - - $\zeta = 0,75$.

¹⁴ A. M. OBUKHOV, Dokl. Akad. Nauk SSSR **66**, 643 [1949].

¹⁵ A. M. OBUKHOV u. A. M. YAGLOM, Techn. Memor. NACA, Wash., No. 1350 [1951].

¹⁶ M. S. UBEROI, J. Aero. Sci. **20**, 197 [1953].

diglich UBEROI¹⁶ hat bei der Re-Zahl $R_\lambda = 60$ einige Messungen der Druckkorrelation durchgeführt. Da jedoch in unserem Fall $R_\lambda = 20$ ($R_\lambda^2 = 10 R_M/D$), können unsere Ergebnisse nicht mit UBEROIS Messungen verglichen werden. Doch hat UBEROI auch die Größe A in Abhängigkeit von R_λ gemessen und gelangt für $R_\lambda \approx 25$ zu einem Wert $A = 0,6$, der sehr gut mit dem hier berechneten übereinstimmt (Abb. 10). Aus dieser Abbildung kann man auch entnehmen, daß wir noch weit vom asymptotischen Zustand $t \gg t^*$ entfernt sind, denn der Anstieg dA/dx ist nur sehr gering.

In Abb. 11 ist der Abklingvorgang für die Druckdifferenzfunktion aufgetragen, die von russischen Autoren auch als Strukturfunktion des Druckfeldes bezeichnet wird, von ihnen aber nur im Rahmen der KOLMOGOROVschen Theorie behandelt worden ist.

Ich danke Herrn Professor Dr. W. TOLLMIEN für die Anregung und Förderung dieser Arbeit. Herrn Professor Dr. L. BIERMANN danke ich für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine G 1 des Max-Planck-Institutes für Physik zu benutzen, wodurch mir die Durchführung der Rechnungen wesentlich erleichtert wurde.

Lichtanregung beim Stoß von Helium mit leichtem und schwerem Wasserstoff*

Von W. HANLE und G. A. Voss

Aus dem I. Physikalischen Institut der Technischen Universität Berlin und dem Physikalischen Institut der Justus-Liebig-Hochschule Gießen
(Z. Naturforsch. **11a**, 857–862 [1956]; eingegangen am 30. August 1956)

Werden Wasserstoffionen in Helium geschossen, so erfolgt eine Anregung der Triplettspektren des Heliums. Daneben tritt beim Stoß von H_2^+ - und H_3^+ -Ionen auf Helium noch die BALMER-Serie des Wasserstoffs in Erscheinung, die bei der Dissoziation der Wasserstoffionen angeregt wird. Die Anregungsfunktionen der Heliumlinien 3889 Å ($2^3 S - 3^3 P$) und 5876 Å ($2^3 P - 3^3 D$) und der H_α -Linie des Wasserstoffs steigen im untersuchten Bereich (Stoßenergien zwischen 2 und 20 keV) langsam und gleichmäßig an.

Die beim Stoß von Ionen des *schweren* Wasserstoffs auf Helium erhaltenen Anregungsfunktionen fallen mit den beim Stoß von Ionen des *leichten* Wasserstoffs sich ergebenden innerhalb der Fehlergrenzen zusammen, wenn man die Intensität des angeregten Leuchtens nicht als Funktion der Energie sondern über der Geschwindigkeit der stoßenden Teilchen aufträgt. Dies ist in Übereinstimmung mit der Theorie des Korpuskularstoßes, wonach für die Energieübertragung durch unelastischen Stoß nicht die Energie, sondern die Geschwindigkeit der Teilchen maßgebend ist.

Die Lichtanregung durch Heliumionen in leichtem und schwerem Wasserstoff ist gleich. Das intensive Auftreten der Heliumbogenlinien bei diesem Prozeß sowie das starke Ansteigen der Lichtintensität bei abnehmenden Stoßenergien deuten jedoch darauf hin, daß es sich hier nicht um eine echte Lichtanregung durch Ionenstoß, sondern um ein Wiedervereinigungsleuchten des Heliums handelt.

Bei den bisher durchgeföhrten Versuchen über die Lichtanregung durch Stoß von Atomen und Ionen des leichten und schweren Wasserstoffs^{1–4} wurde der in einer Ionenquelle (Niedervoltkapillarbogen oder Kanalstrahlrohr) erzeugte Teilchenstrahl direkt in das anzuregende Gas geschossen. Da eine Zerlegung in seine Komponenten aus Intensitätsgründen nicht möglich war, konnte die beobachtete Lichtanregung nicht eindeutig einer bestimmten

Teilchenart (H , H_2 und H^+ , H_2^+ , H_3^+ bzw. D , D_2 und D^+ , D_2^+ , D_3^+) zugeordnet werden. Unterschiede in der Lichtanregung beim Übergang von leichtem zu schwerem Wasserstoff waren möglicherweise Folgen einer Änderung der Zusammensetzung des Teilchenstrahls. Auch konnte bei diesen Messungen eine geringe Verunreinigung des Strahls durch Fremdionen die Messung in unkontrollierbarer Weise verfälschen. Deshalb bestand der Wunsch, die Licht-

* Zugleich Dissertation an der Technischen Universität Berlin.

¹ F. ENGELMANN, Z. Phys. **113**, 462 [1939].

² R. JUNKELMANN, Z. Phys. **107**, 561 [1937].

³ W. HANLE u. R. JUNKELMANN, Phys. Z. **37**, 593 [1936].

⁴ W. HANLE, Phys. Z. **38**, 995 [1937].